

5 ΒΑΣΙΚΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΣΚΟΠΟΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Η παρουσίαση του βασικού κυκλώματος άθροισης
- Η κατανόηση χρήσης του κυκλώματος άθροισης για εκτέλεση αφαίρεσης
- Να φανεί η χρησιμότητα στην πράξη του συμπληρώματος ως προς 2

5.1 Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι στο εσωτερικό μιας ΚΜΕ υπάρχει ένα σύνολο από κυκλώματα τα οποία συντονισμένα μέσω κατάλληλων σημάτων της μονάδας ελέγχου αλληλεπιδρούν μεταξύ τους προκειμένου να είναι δυνατή η εκτέλεση κάθε εντολής που προσκομίζεται από την κεντρική μνήμη. Ένα εξαιρετικά μεγάλο ποσοστό εντολών περιλαμβάνει την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων. Η εκτέλεση αυτών των πράξεων είναι δουλειά της αριθμητικής και λογικής μονάδας (ΑΛΜ). Από όλα τα εσωτερικά κυκλώματα της ΑΛΜ ξεχωρίζει αυτό που πραγματοποιεί τη λειτουργία της άθροισης. Η σημαντικότητα αυτού του κυκλώματος οφείλεται στο γεγονός ότι χρησιμοποιείται στην ουσία για την υλοποίηση όλων σχεδόν των πράξεων που υποστηρίζονται από την ΑΛΜ και κατ' επέκταση από την ΚΜΕ. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο ενδιαφερόμαστε για το κύκλωμα της άθροισης το οποίο υποστηρίζει τόσο τη γνωστή πρόσθεση όσο και την αφαίρεση.

5.2 Κύκλωμα άθροισης 2 bit

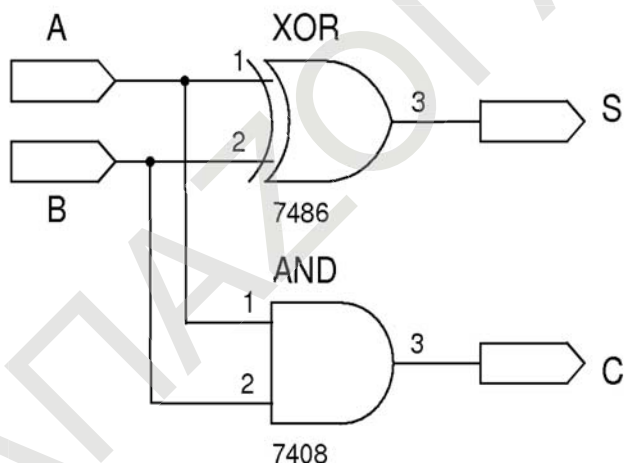
Επιχειρώντας να παρουσιάσουμε και να αναλύσουμε πολυπλοκότερα κυκλώματα άθροισης που υπάρχουν στις σύγχρονες ΚΜΕ είναι αναγκαίο να αναλύσουμε αρχικά απλούστερα κυκλώματα που υποστηρίζουν τις αντίστοιχες λειτουργίες. Η επιλογή της ανάλυσης απλών κυκλωμάτων δε γίνεται μόνο για λόγους κατανόησης αλλά και επειδή η φιλοσοφία λειτουργίας τους εφαρμόζεται και στα πολυπλοκότερα κυκλώματα (π.χ. για την υποστήριξη αριθμητικών πράξεων περισσότερων bit).

Ο πίνακας 5.1 (πίνακας αληθείας) περιγράφει τη συμπεριφορά του κυκλώματος που υλοποιεί τον ημιαθροιστή.

Πίνακας 5.1 Συμπεριφορά κυκλώματος ημιαθροιστή				
A	B	Κρατούμενο (ψηφίο S_1)	Άθροισμα (ψηφίο S_0)	Τιμή στο δεκαδικό σύστημα
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	2

Από τον πίνακα 5.1 προκύπτει άμεσα ότι το ψηφίο S_1 προκύπτει με την εφαρμογή μιας πύλης AND ενώ το S_0 με την εφαρμογή μιας πύλης αποκλειστικού OR (XOR). Το σχήμα 5.1 δείχνει τη σύνθεση του κυκλώματος του ημιαθροιστή με τη χρήση των στοιχειωδών πυλών που είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Σχήμα 5.1 Το λογικό κύκλωμα του ημιαθροιστή



5.3 Κύκλωμα άθροισης 4 bit

Στην περίπτωση πρόσθεσης αριθμών με περισσότερα από ένα bit (για τον κάθε αριθμό) το κύκλωμα του ημιαθροιστή δεν είναι κατάλληλο επειδή στα περισσότερα σημαντικά ψηφία απαιτείται και ο συνυπολογισμός του κρατούμενου που θα προκύπτει κάθε φορά. Έστω ότι πρόκειται να πραγματοποιηθεί η πρόσθεση δύο αριθμών 4 bit (A και B, σχήμα 5.2).

Σχήμα 5.2 Πρόσθεση αριθμών 4bit

C_3	C_2	C_1	C_0	
	A_3	A_2	A_1	A_0
+	B_3	B_2	B_1	B_0

C_3	S_3	S_2	S_1	S_0

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.2 ο ημιαθροιστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για την πρόσθεση του λιγότερου σημαντικού ψηφίου των δύο αριθμών (δεν υπάρχει κανένα ψηφίο δεξιά του).

Στην ακριβώς επόμενη αριστερή στήλη απαιτείται πρόσθεση τριών ψηφίων ($C_0+A_1+B_1$) αφού τώρα συνυπολογίζεται και το κρατούμενο που ενδεχομένως έχει προκύψει. Έτσι, θα πρέπει να γίνει χρήση ενός στοιχείου άθροισης τριών bit αντί δύο που καλύπτει ο ημιαθροιστής. Το στοιχείο άθροισης αυτό ονομάζεται πλήρης αθροιστής.

Στον πίνακα 5.2 φαίνεται το άθροισμα και το κρατούμενο που παράγεται με το συνδυασμό των τριών ψηφίων του πλήρη αθροιστή.

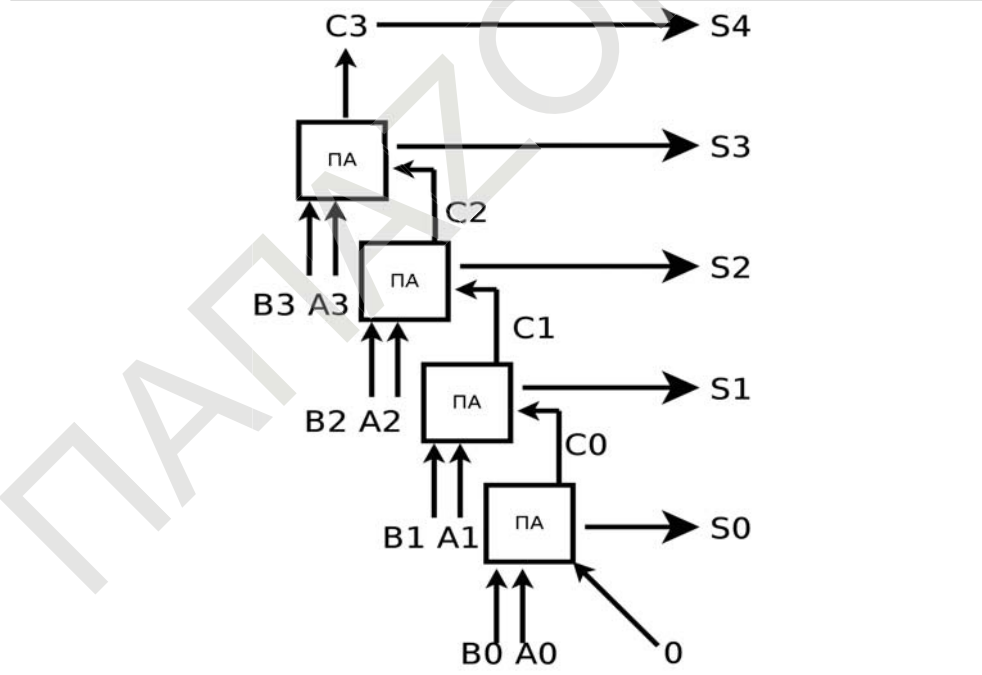
Πίνακας 5.2 Πίνακας αληθείας πλήρη αθροιστή

A	B	C	Άθροισμα	Κρατούμενο
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Το σχήμα 5.3 δείχνει τις βαθμίδες άθροισης που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση της πρόσθεσης δύο αριθμών τεσσάρων bit (βάσει του σχήματος 5.2). Παρατηρήστε στο σχήμα 5.3 ότι όλες οι βαθμίδες αποτελούνται από πλήρη αθροιστή παρά το γεγονός ότι η πρόσθεση του λιγότερου σημαντικού ψηφίου (A_0+B_0) απαιτεί απλά τη χρήση ημιαθροιστή. Αυτό γίνεται για λόγους ομοιογένειας και εξυπηρετεί στη φυσική κατασκευή του κυκλώματος. Το γεγονός ότι γίνεται χρήση πλήρη αθροιστή στην πρώτη βαθμίδα σημαίνει ότι υπάρχει μια ακόμα ελεύθερη είσοδος. Η τρίτη είσοδος του πρώτου αθροιστή τροφοδοτείται με μηδέν ώστε να μην επηρεαστεί το αποτέλεσμα που παράγεται (στο σχήμα 5.3 είναι σημειωμένο με το διαγώνιο βελάκι).

Μπορούμε επίσης να διαπιστώσουμε ότι το πλήθος των βαθμίδων ταυτίζεται με το πλήθος των bit των αριθμών που πρόκειται να προστεθούν. Στην περίπτωση που χρησιμοποιήσουμε ημιαθροιστή για το λιγότερο σημαντικό ψηφίο θα χρειαστούν τελικά $n-1$ πλήρεις αθροιστές και ένας ημιαθροιστής (όπου n το πλήθος των bit των αριθμών).

Σχήμα 5.3 Υλοποίηση άθροισης αριθμών 4 bit

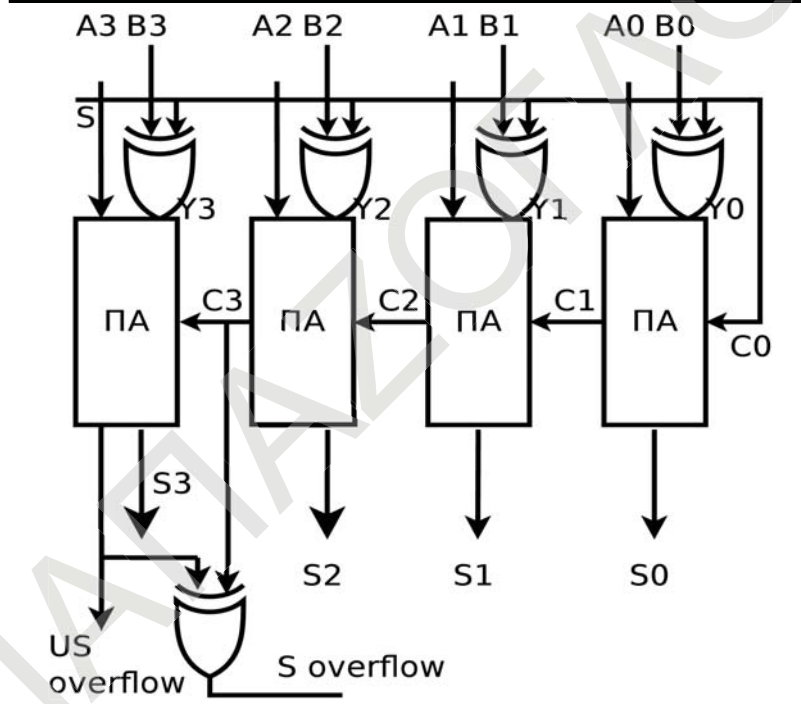


5.4 Κύκλωμα πρόσθεσης και αφαίρεσης

Λαμβάνοντας υπόψη τον τρόπο που γίνεται η αφαίρεση με το συμπλήρωμα ως προς 2 υπάρχει η δυνατότητα να κατασκευαστεί ένα μόνο κύκλωμα το οποίο να πραγματοποιεί είτε πρόσθεση είτε αφαίρεση. Στην περίπτωση της αφαίρεσης θα πρέπει το κύκλωμα να αντιστρέφει τα ψηφία του αριθμού που θα αφαιρεθεί και να προσθέτει στη συνέχεια μια μονάδα.

Η επιλογή της αφαίρεσης θα πρέπει να γίνεται με την κατά βούληση ενεργοποίηση ενός ακροδέκτη ελέγχου. Το σχήμα 5.4 δείχνει το πλήρες κύκλωμα που υλοποιεί τόσο την πρόσθεση όσο και την αφαίρεση.

Σχήμα 5.4 Κύκλωμα πρόσθεσης-αφαίρεσης



Περίληψη κεφαλαίου

Τα βασικά αριθμητικά κυκλώματα της ΚΜΕ βρίσκονται εντός της αριθμητικής και λογικής μονάδας (ΑΛΜ). Τα κυκλώματα αυτά υλοποιούν τόσο τις αριθμητικές πράξεις που προκύπτουν από τις εντολές που δίνει ο προγραμματιστής όσο και τις αντίστοιχες πράξεις που απαιτούνται από την ίδια την ΚΜΕ.

Μία κλασική ΑΛΜ δέχεται ως είσοδο δύο αριθμούς και ενεργοποιείται το αντίστοιχο κύκλωμα που πραγματοποιεί την επιθυμητή πράξη.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκε ο απαιτούμενος συνδυασμός βαθμίδων αθροιστών τόσο για την υλοποίηση κλασικής πρόσθεσης όσο και για την υλοποίηση αφαιρέσεως μέσω του συμπληρώματος ως προς 2 το οποίο και υπολογίζεται αυτόματα από το κύκλωμα.

Η ενημέρωση του περιεχομένου του μετρητή προγράμματος αποτελεί ένα παράδειγμα χρήσης αριθμητικών κυκλωμάτων από την ίδια την ΚΜΕ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1 Υπολογίστε το πλήθος των βαθμίδων αθροιστών που απαιτούνται για την πρόσθεση δύο αριθμών που ανήκουν στα διαστήματα $[1,345]$ και $[0,1200]$ αντίστοιχα.

Λύση

Θα πρέπει να υπολογίσουμε το πλήθος των bit που απαιτούνται για την αναπαράσταση των αριθμών στα συγκεκριμένα διαστήματα. Αυτό όμως που απλοποιεί αυτό τον υπολογισμό είναι ότι θα χρειαστεί να βρούμε το πλήθος των ψηφίων μόνο για το μεγαλύτερο αριθμό ενώ όπου υπολείπονται ψηφία (για τους άλλους αριθμούς) θα συμπληρώνονται με μηδενικά.

Για το αριθμό 1200 απαιτούνται N bit ώστε να ισχύει ότι $2^N \geq 1200$. Δοκιμάζοντας διάφορες τιμές για το N βρίσκουμε ότι $N=11$ αφού για $N=10$ αναπαριστούμε αριθμούς στο διάστημα

[0,1023] και με $N=11$ αριθμούς στο διάστημα [0,2047].
Επομένως απαιτούνται 11 βαθμίδες πλήρη αθροιστή ή 10 βαθμίδες
(δηλαδή $N-1$) πλήρη αθροιστή και μια βαθμίδα ημιαθροιστή.

Άσκηση 2 Υπολογίστε το πλήθος των βαθμίδων αθροιστών που απαιτούνται για την πρόσθεση δύο αριθμών που ανήκουν στα διαστήματα [0,67345] και [0,1239860] αντίστοιχα.

Λύση

Και σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να ισχύει ο ίδιος τύπος μόνο που δεν είναι πρακτικά εφικτό να κάνουμε τόσες χρονοβόρες δοκιμές για την τιμή του N . Ένας εναλλακτικός τρόπος είναι να υπολογίσουμε το λογάριθμο βάσει του 2 για το μεγαλύτερο αριθμό. Έτσι υπολογίζουμε το $\log_2 1239860$. Ο υπολογισμός αυτός δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\log_2 1239860 = 20.24 \text{ bit}$$

Στρογγυλοποιώντας προς τα πάνω προκύπτει ότι $N=21$ bit. Αν κάνουμε τον υπολογισμό 2^{21} θα πάρουμε αποτέλεσμα 2097152 ενώ αν υπολογίσουμε το 2^{20} θα πάρουμε το 1048576. Οπότε πράγματι χρησιμοποιώντας 21 bit μπορούμε να αποτυπώσουμε όλο το εύρος των αριθμών. Έτσι θα χρειαστούν 21 βαθμίδες πλήρη αθροιστή.

Άσκηση 3 Μελετώντας το κύκλωμα του σχήματος 5.4 συμπληρώστε κατάλληλους πίνακες:
(α) πίνακα τιμών των S , B_i , Y_i , C_0
(β) πίνακα λειτουργίας για τον ακροδέκτη S (τύπος υπολογισμού και αριθμητική πράξη)

Λύση

Όταν ο ακροδέκτης S έχει την τιμή 1 η πύλη XOR αντιστρέφει τα ψηφία του αριθμού B ($B_i \Rightarrow Y_i$). Η ίδια τιμή αποτελεί και την

τρύτη είσοδο στον πρώτο αθροιστή (λιγότερο σημαντικό ψηφίο). Άρα όταν $S=1$ γίνεται υπολογισμός του $-B$ και το κύκλωμα πραγματοποιεί αφαίρεση μέσω του συμπληρώματος ως προς 2. Έτσι, οι πίνακες συμπληρώνονται ως ακολούθως:

S	B_i	Y_i	C_0
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

Ακροδέκτης S	Τύπος υπολογισμού	Αριθμητική πράξη
0	πρόσθεση	$A+B$
1	αφαίρεση	$A+B'+1$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Άσκηση 1** Αναζητήστε στη βιβλιογραφία ή το internet κατάλληλες πληροφορίες ώστε να παρουσιάσετε τη λειτουργία του σειριακού αθροιστή.
- Άσκηση 2** Να κάνετε σύγκριση των χαρακτηριστικών των αθροιστών που παρουσιάστηκαν σε αυτό το κεφάλαιο με το σειριακό αθροιστή.
- Άσκηση 3** Δείξτε με τις κατάλληλες κυματομορφές την πρόσθεση των αριθμών 5 και 8 με τα κυκλώματα αθροιστών που παρουσιάστηκαν σε αυτό το κεφάλαιο.
- Άσκηση 4** Δείξτε με τις κατάλληλες κυματομορφές την πρόσθεση των αριθμών 5 και 8 χρησιμοποιώντας κύκλωμα σειριακού αθροιστή.