Εισαγωγή στην πληροφορική και τις εφαρμογές της

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΑΠΑΖΟΓΛΟΥ

Website: https://papazoglou-files.gr/books/

Επιστημονικές Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ

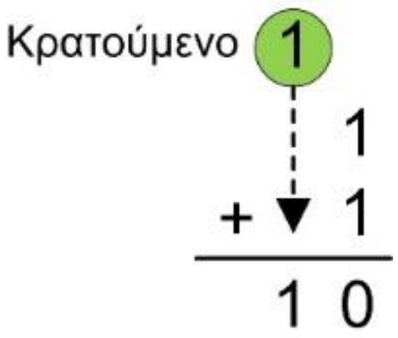
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αριθμητικές πράξεις

Επιστημονικές Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ

Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς
Πρόσθεση (1)

Πρόσθεση δύο bit			
A	**B**	**A+B**	**Κρατούμενο**
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1



Πρόσθεση τριών αριθμών του ενός bit				
A	**B**	**C**	**A+B+C**	**Κρατούμενο**
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς
Πρόσθεση (2)

$$\begin{array}{cccccc}
C_{n-1} & C_{n-2} & C_{n-3} & C_0 & & \\
\downarrow & A_{n-1} & A_{n-2} & A_{n-3} & A_0 & \\
\downarrow & B_{n-1} & B_{n-2} & B_{n-3} & B_0 & + \\
\cline{2-5}
C_{n-1} & S_{n-1} & S_{n-2} & S_{n-3} & S_0 &
\end{array}$$

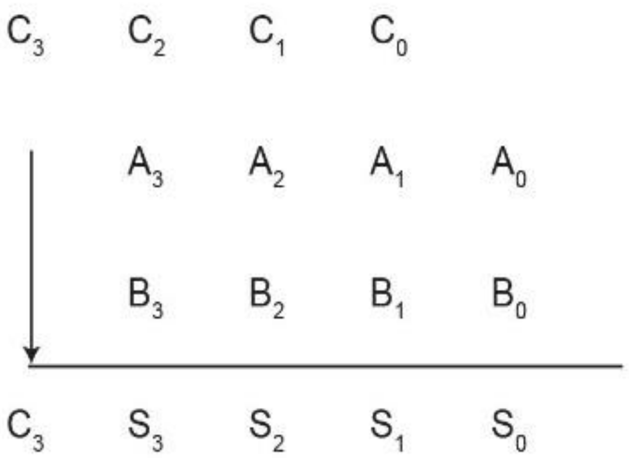
Πρόσθεση αριθμών n bit

$$\begin{array}{cccccc}
C_{n-1} & C_{n-2} & C_{n-3} & C_0 & & \\
\downarrow & A_{n-1} & A_{n-2} & A_{n-3} & A_0 & \\
\downarrow & B_{n-1} & B_{n-2} & B_{n-3} & B_0 & + \\
\cline{2-5}
C_{n-1} & S_{n-1} & S_{n-2} & S_{n-3} & S_0 &
\end{array}$$

Διάδοση κρατούμενου

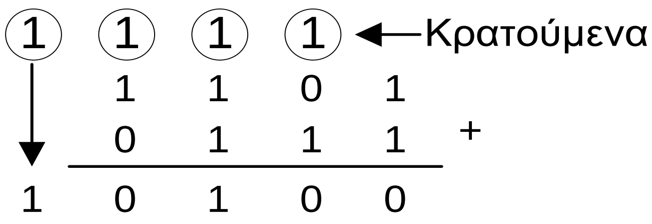
Επιστημονικές Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ

Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς
Πρόσθεση (3)



Πράξη	Άθροισμα	Κρατούμενο (πιθανό)
A_0+B_0	S_0	C_0
$C_0+A_1+B_1$	S_1	C_1
$C_2+A_2+B_2$	S_2	C_2
$C_2+A_3+B_3$	S_3	C_3

Πρόσθεση με 4bit



Παράδειγμα

Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς

Πρόσθεση (4) – Πολλαπλής ακρίβειας

Παράδειγμα

High και Low byte αριθμών	
298	
High byte	Low byte
00000001	00101010
1233	
High byte	Low byte
00000100	11010001

	High byte		**Low byte**
	00000001		00101010
+	00000100	+	11010001
	00000101		11111011

$00000101\ 11111011_{(2)} = 1531_{(10)}$

Πρόσθεση High και Low byte

	High byte		**Low byte**	
	00000001		01101010	(362)
+	00000100	+	11010001	(1233)
	00000101	1	00111011	
+	1			
	00000110		00111011	(1595)

Πρόσθεση πολλαπλής ακρίβειας με κρατούμενο

Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς
Αφαίρεση

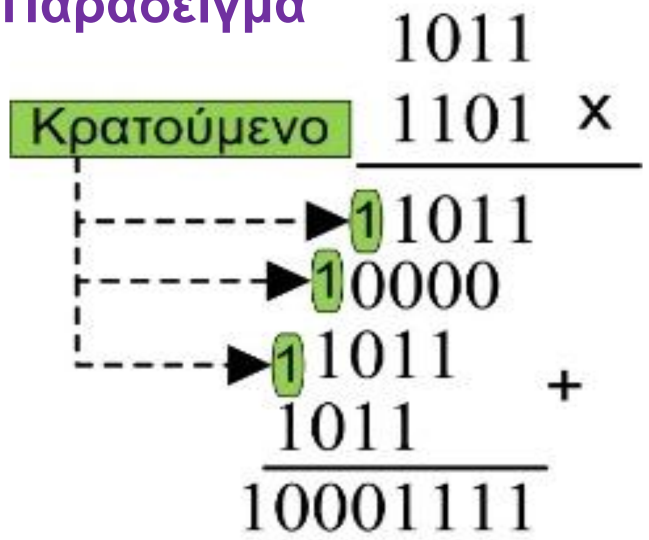
Αφαίρεση δύο αριθμών του ενός bit			
A	**B**	**A-B**	**Δανεικό**
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

Αφαίρεση τριών αριθμών του ενός bit				
A	**B**	**C**	**A-B-C**	**Δανεικό**
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

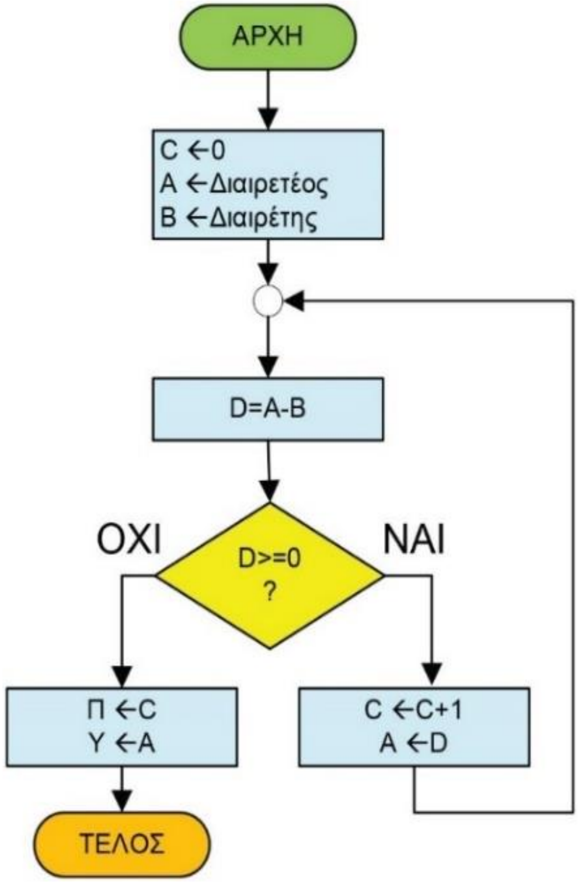
Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς
Πολλαπλασιασμός

Πολλαπλασιασμός δύο αριθμών του ενός bit		
A	**B**	**A x B**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Παράδειγμα



Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς
Διαίρεση με διαδοχικές αφαιρέσεις (1)



Υπολογισμός 11/2

Βήμα 1	11-2=9
Βήμα 2	9-2=7
Βήμα 3	7-2=5
Βήμα 4	5-2=3
Βήμα 5	3-2=1
Βήμα 6	1-2=-1

Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς
Διαίρεση με διαδοχικές αφαιρέσεις (2)

Ακέραια διαίρεση 11/2

Βήμα 1

C=0, A=11, B=2

D=11-2=9

D>=0, C=1, A=9

Βήμα 2

D=9-2=7

D>=0, C=2, A=7

Βήμα 3

D=7-2=5

D>=0, C=3, A=5

Βήμα 4

D=5-2=3

D>=0, C=4, A=3

Βήμα 5

D=3-2=1

D>=0, C=5, A=1

Βήμα 6

D=1-2=-1

D<0, Π=C=5, Y=A=1

Ακέραια διαίρεση 6/2

Βήμα 1

C=0, A=6, B=2

D=6-2=4

D>=0, C=1, A=4

Βήμα 2

D=4-2=2

D>=0, C=2, A=2

Βήμα 3

D=2-2=0

D>=0, C=3, A=0

Βήμα 4

D=0-2=-2

D<0, Π=C=3, Y=A=0

Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς
Διαίρεση με διαδοχικές αφαιρέσεις (3)

1011/10

Βήμα 1   1011-10=1001

Βήμα 2   1001-10=0111

Βήμα 3   0111-10=0101

Βήμα 4   0101-10=0011

Βήμα 5   0011-10=0001

Επιστημονικές Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ

Προσημασμένοι ακέραιοι αριθμοί
Αναπαράσταση «πρόσημο και μέτρο»

Μέτρηση με προσημασμένους αριθμούς			
Δεκαδικό σύστημα	**Μη προσημασμένοι**	**Δεκαδικό σύστημα**	**Προσημασμένοι «πρόσημο και μέτρο»**
0	000	0	000
1	001	1	001
2	010	2	010
3	011	3	011
4	100	-0	100
5	101	-1	101
6	110	-2	110
7	111	-3	111
Εύρος τιμών	0 έως 7	**Εύρος τιμών**	-3 έως 3

$$N = \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \alpha_i \quad \text{εφόσον } \alpha_{n-1}=0$$

$$N = -\sum_{i=0}^{n-2} 2^i \alpha_i \quad \text{εφόσον } \alpha_{n-1}=1$$

Επιστημονικές Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ

Προσημασμένοι ακέραιοι αριθμοί
Αναπαράσταση «συμπλήρωμα ως προς δύο»

Παράσταση με συμπλήρωμα ως προς 2	
Αριθμός 4bit	**Αριθμητική αξία στο δεκαδικό σύστημα (βάσει του Σ_2)**
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	-8
1001	-7
1010	-6
1011	-5
1100	-4
1101	-3
1110	-2
1111	-1

Κυκλική λειτουργία συμπληρώματος
Σ_2 (1100) = 0011+1 = 0100 = $4_{(10)}$
Σ_2 (0100) = Σ_2 (4) = 1011+1 = 1100 = - $4_{(10)}$

Επιστημονικές Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ

Αφαίρεση με συμπλήρωμα ως προς 2 (1)

81-54

$81_{(10)} = 1010001_{(2)}$

$54_{(10)} = 0110110_{(2)}$

$-54_{(10)} = \Sigma_2(54) = 1001001_{(2)} + 1 = 1001010_{(2)}$

$-81_{(10)} = \Sigma_2(81) = 0101110_{(2)} + 1 = 0101111_{(2)}$

81+(-54)

1 κρ.

```
   1010001
+  1001010
  ----------
  10011011
```

$\cancel{1}0011011$

Κρατούμενο αριστερά από το περισσότερο σημαντικό ψηφίο (MSB)

- το διαγράφουμε και το αποτέλεσμα είναι **θετικό**
- **μέτρο** αριθμού : τα υπόλοιπα bit

Αν δεν προκύψει κρατούμενο

- το αποτέλεσμα είναι **αρνητικό**
- **μέτρο** αριθμού : το συμπλήρωμα ως προς 2 των bit του αποτελέσματος

Αφαίρεση με συμπλήρωμα ως προς 2 (2)
54-81

54+(-81)

11111
κρ.

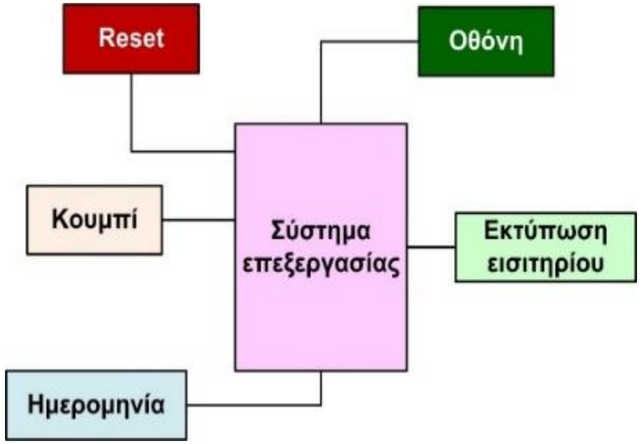
0110110
+ 0101111

1100101

Σ_2(1100101)=0011010+1=0011011 που είναι ο αριθμός 27 (54-81=-27)

Εφαρμογή
Εισιτήριο αυτοκινήτων (1)

- Σύγχρονο εμπορικό κέντρο με πάρκινγκ αυτοκινήτων 680 θέσεων
- Είσοδος από το ισόγειο (χωρητικότητα 90 θέσεων)



Εφαρμογή
Εισιτήριο αυτοκινήτων (2)

Έλεγχος διαθεσιμότητας

- Ο οδηγός πατά το κουμπί για την έκδοση του εισιτηρίου
- Αυξάνεται ο μετρητής που μετρά το σύνολο των αυτοκινήτων από την αρχή της μέρας
- Συγκρίνεται με το συνολικό πλήθος των θέσεων
- Σύγκριση : αφαίρεση του α/α οχήματος από τον αριθμό που αντιπροσωπεύει τις μέγιστες θέσεις, δηλαδή το 90
- Αν υποθετικά πρόκειται για το $51^{ο}$ όχημα, τότε θα πρέπει να γίνει η αφαίρεση 90-51

$90_{10} = 1011010_2$
$51_{10} = 0110011_2$

90-51 : θα εκτελεστεί ως 90+(-51), άρα θα πρέπει να προσθέσουμε στο 90 το συμπλήρωμα ως προς 2 του αριθμού 51.

$(-51)_2 = 1001101_2$

τελική πράξη :

```
 1011010
+1001101
----------
 10100111
```

Υπάρχει κρατούμενο

- το αγνοούμε και το αποτέλεσμα είναι θετικό
- υπάρχει διαθέσιμη θέση

Εφαρμογή
Εισιτήριο αυτοκινήτων (3)

Δημιουργία γραμμωτού κώδικα

- Μοναδικός κώδικας για κάθε όχημα
- Συνδυασμός ημερομηνίας και αριθμού θέσης στο πάρκινγκ (1 έως 90)
- π.χ για την ημερομηνία 18/3/2021 και θέση 51, ο αριθμός που προκύπτει είναι 18032151

[1-31] = 5bit (2^5=32)

[1-12] = 4bit (2^4=16)

[21-31] = 5bit (2^5=32)

[1-90] = 7bit (2^7=128)

μετατρέποντας τον κωδικό αριθμό 18032151 ανά δύο ψηφία στο δυαδικό σύστημα, προκύπτει η ακολουθία:

18_{10}	03_{10}	21_{10}	51_{10}
10010_2	0011_2	10101_2	0110011_2

Γράφοντας με συνεχόμενο τρόπο όλα τα ψηφία, προκύπτει

1001000111010101100110011

Εφαρμογή
Εισιτήριο αυτοκινήτων (4)

Λεπτή κάθετη γραμμή: 0
Φαρδιά κάθετη γραμμή: 1

Αναπαράσταση αριθμών κινητής υποδιαστολής
πρότυπο IEEE 754 (1)

Συστατικά

- πρόσημο
- εκθέτης
- κλασματικό μέρος (γνωστό και στη βιβλιογραφία ως Mantissa)

Η βάση του συστήματος θεωρείται πάντα ότι είναι το 2 και έτσι δεν έχει νόημα να αποθηκεύεται ως συστατικό του αριθμού αυτή η πληροφορία

Τύποι αναπαράστασης

- απλής ακρίβειας με 32bit
- διπλής ακρίβειας με 64bit

Αναπαράσταση αριθμών κινητής υποδιαστολής
πρότυπο IEEE 754 (2)

	Πρότυπο απλής και διπλής ακρίβειας						
	Πρόσημο		Εκθέτης		Κλασματικό μέρος		Πόλωση
	Πλήθος bit	Θέση bit	Πλήθος bit	Θέση bit	Πλήθος bit	Θέση bit	
Απλή ακρίβεια	1	31	8	30-23	23	22-00	127
Διπλή ακρίβεια	1	63	11	62-52	52	51-00	1023

Τύπος

$$X = (-1)^{S} \times (1+KM) \times 2^{(E-\Pi)}$$

X: τελικός αριθμός
S: πρόσημο
KM: κλασματικό μέρος
E: εκθέτης
Π: πόλωση

Αναπαράσταση αριθμών κινητής υποδιαστολής
πρότυπο IEEE 754 (3)

ποιον αριθμό του δεκαδικού συστήματος αντιπροσωπεύει ο δυαδικός αριθμός

110000001

1	**10000001**	01000000000000000000000
S	E	KM

E = 129 (10000001)
KM = περιλαμβάνει τα bit δεξιά από την υποδιαστολή
Εφόσον ο αριθμός 01000000000000000000000 βρίσκεται δεξιά από την υποδιαστολή (δηλαδή 0.**01000000000000000000000**), σημαίνει ότι το 1 έχει βάρος 2^{-2}, δηλαδή 1/4=0.25

Συνδυάζοντας τα πεδία του αριθμού προκύπτει:

$X = (-1)^1 \times (1+01_2) \times 2^{(129-127)} = (-1) \times 1.25 \times 2^2 = -5.0$

Ολοκλήρωση κεφαλαίου

Δείτε τις ασκήσεις από το βιβλίο

Επιστημονικές Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ