

Εισαγωγή στην πληροφορική και τις εφαρμογές της

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΑΠΑΖΟΓΛΟΥ

Website: microdev.gr



Επιστημονικές Εκδόσεις
ΤΖΙΟΛΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

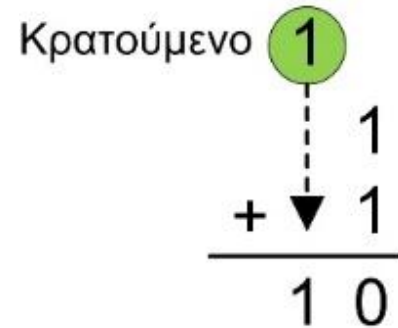
Αριθμητικές πράξεις



Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς

Πρόσθεση (1)

Πρόσθεση δύο bit			
A	B	A+B	Κρατούμενο
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1



Πρόσθεση τριών αριθμών του ενός bit				
A	B	C	A+B+C	Κρατούμενο
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

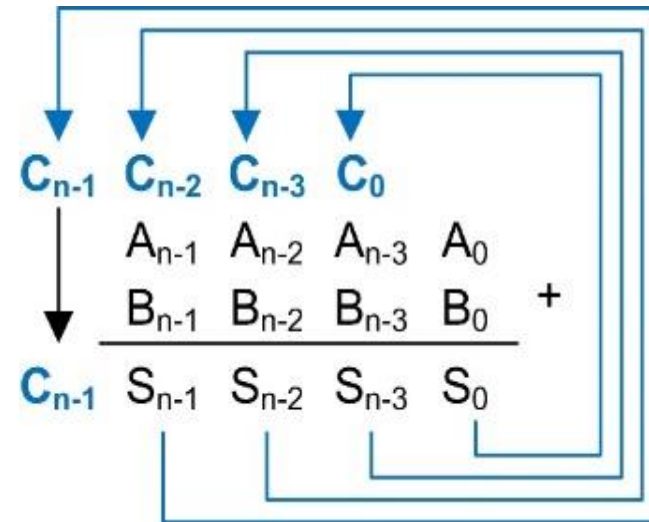


Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς

Πρόσθεση (2)

$$\begin{array}{rcccc} C_{n-1} & C_{n-2} & C_{n-3} & C_0 \\ \downarrow & & & & \\ A_{n-1} & A_{n-2} & A_{n-3} & A_0 \\ B_{n-1} & B_{n-2} & B_{n-3} & B_0 & + \\ \hline C_{n-1} & S_{n-1} & S_{n-2} & S_{n-3} & S_0 \end{array}$$

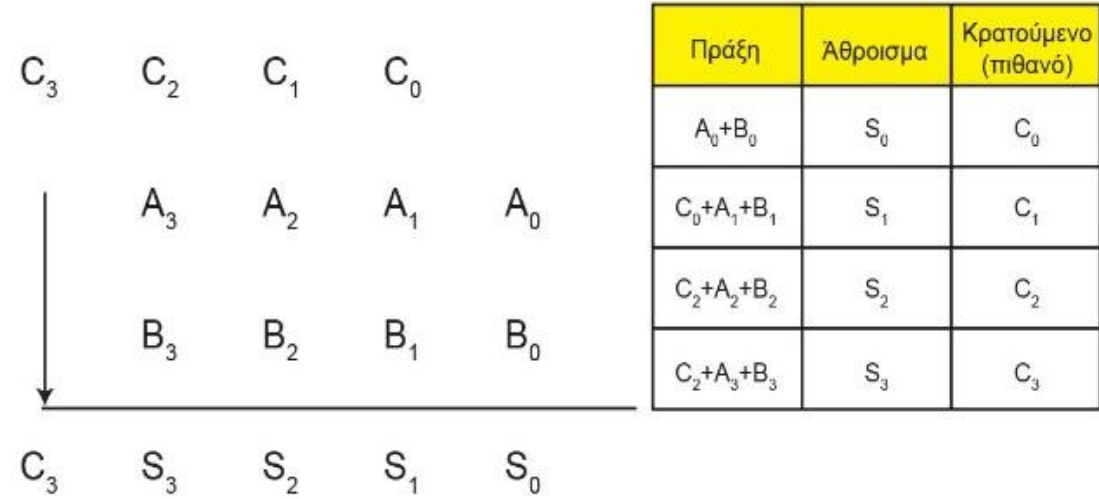
Πρόσθεση αριθμών n bit



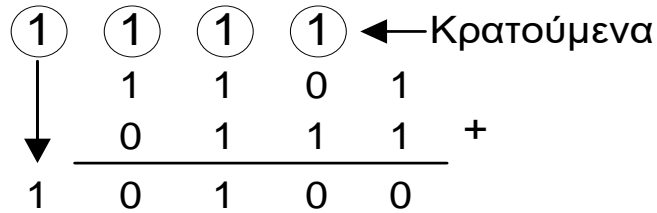
Διάδοση κρατούμενου

Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς

Πρόσθεση (3)



Πρόσθεση με 4bit



Παράδειγμα



Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς

Πρόσθεση (4) – Πολλαπλής ακρίβειας

Παράδειγμα

High και Low byte αριθμών	
298	
High byte	Low byte
00000001	00101010
1233	
High byte	Low byte
00000100	11010001

High byte	Low byte
00000001	00101010
+ 00000100	+ 11010001
<u>00000101</u>	<u>11111011</u>

00000101 11111011₍₂₎ = 1531₍₁₀₎

Πρόσθεση High και Low byte

High byte	Low byte	
00000001	01101010	(362)
+ 00000100	+ 11010001	(1233)
<u>00000101</u>	<u>00111011</u>	
+ <u>1</u>	00111011	(1595)
00000110		

① ← (Carry from Low byte addition)

Πρόσθεση πολλαπλής ακρίβειας με κρατούμενο



Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς

Αφαίρεση

Αφαίρεση δύο αριθμών του ενός bit			
A	B	A-B	Δανεικό
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

Αφαίρεση τριών αριθμών του ενός bit				
A	B	C	A-B-C	Δανεικό
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1



Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς

Πολλαπλασιασμός

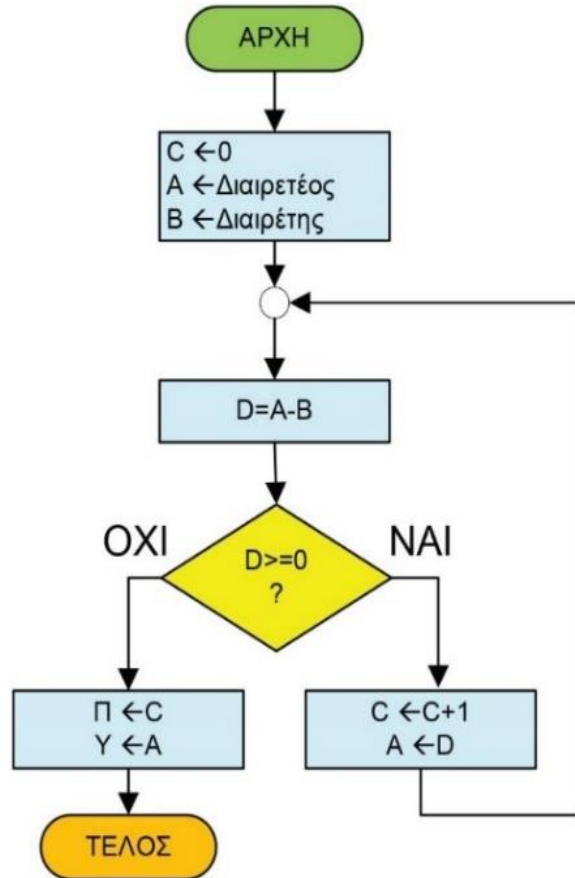
Πολλαπλασιασμός δύο αριθμών του ενός bit		
A	B	A x B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Παράδειγμα

$$\begin{array}{r} 1011 \\ \times 1101 \\ \hline \text{Κρατούμενο} \quad 1101 \\ \hline \begin{array}{r} \rightarrow 11011 \\ \rightarrow 10000 \\ \rightarrow 11011 \\ \quad 1011 \end{array} + \\ \hline 10001111 \end{array}$$

Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς

Διαίρεση με διαδοχικές αφαιρέσεις (1)



Υπολογισμός 11/2

Βήμα 1	11-2=9
Βήμα 2	9-2=7
Βήμα 3	7-2=5
Βήμα 4	5-2=3
Βήμα 5	3-2=1
Βήμα 6	1-2=-1



Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς

Διαίρεση με διαδοχικές αφαιρέσεις (2)

Ακέραια διαίρεση $11/2$

Βήμα 1

$$C=0, A=11, B=2$$

$$D=11-2=9$$

$$D \geq 0, C=1, A=9$$

Βήμα 2

$$D=9-2=7$$

$$D \geq 0, C=2, A=7$$

Βήμα 3

$$D=7-2=5$$

$$D \geq 0, C=3, A=5$$

Βήμα 4

$$D=5-2=3$$

$$D \geq 0, C=4, A=3$$

Βήμα 5

$$D=3-2=1$$

$$D \geq 0, C=5, A=1$$

Βήμα 6

$$D=1-2=-1$$

$$D < 0, \Pi=C=5, Y=A=1$$

Ακέραια διαίρεση $6/2$

Βήμα 1

$$C=0, A=6, B=2$$

$$D=6-2=4$$

$$D \geq 0, C=1, A=4$$

Βήμα 2

$$D=4-2=2$$

$$D \geq 0, C=2, A=2$$

Βήμα 3

$$D=2-2=0$$

$$D \geq 0, C=3, A=0$$

Βήμα 4

$$D=0-2=-2$$

$$D < 0, \Pi=C=3, Y=A=0$$



Αριθμητικές πράξεις με ακέραιους αριθμούς

Διαίρεση με διαδοχικές αφαιρέσεις (3)

1011/10

Βήμα 1 $1011-10=1001$

Βήμα 2 $1001-10=0111$

Βήμα 3 $0111-10=0101$

Βήμα 4 $0101-10=0011$

Βήμα 5 $0011-10=0001$

Προσημασμένοι ακέραιοι αριθμοί

Αναπαράσταση «πρόσημο και μέτρο»

Μέτρηση με προσημασμένους αριθμούς			
Δεκαδικό σύστημα	Μη προσημασμένοι	Δεκαδικό σύστημα	Προσημασμένοι «πρόσημο και μέτρο»
0	000	0	000
1	001	1	001
2	010	2	010
3	011	3	011
4	100	-0	100
5	101	-1	101
6	110	-2	110
7	111	-3	111
Εύρος τιμών	0 έως 7	Εύρος τιμών	-3 έως 3

	$n-2$		
$N =$	\sum	$2^i \alpha_i$	εφόσον $\alpha_{n-1}=0$
	$i=0$		

	$n-2$		
$N =$	$-\sum$	$2^i \alpha_i$	εφόσον $\alpha_{n-1}=1$
	$i=0$		



Προσημασμένοι ακέραιοι αριθμοί

Αναπαράσταση «συμπλήρωμα ως προς δύο»

Παράσταση με συμπλήρωμα ως προς 2	
Αριθμός 4bit	Αριθμητική αξία στο δεκαδικό σύστημα (βάσει του Σ_2)
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	-8
1001	-7
1010	-6
1011	-5
1100	-4
1101	-3
1110	-2
1111	-1

Κυκλική λειτουργία συμπληρώματος

$$\Sigma_2 (1100) = 0011 + 1 = 0100 = 4_{(10)}$$

$$\Sigma_2 (0100) = \Sigma_2 (4) = 1011 + 1 = 1100 = -4_{(10)}$$



Αφαίρεση με συμπλήρωμα ως προς 2 (1)

81-54

$$81_{(10)} = 1010001_{(2)}$$

$$81+(-54)$$

$$54_{(10)} = 0110110_{(2)}$$

1 κρ.

$$-54_{(10)} = \Sigma_2(54) = 1001001_{(2)} + 1 = 1001010_{(2)}$$

$$\begin{array}{r} 1010001 \\ + 1001010 \\ \hline \cancel{1}0011011 \end{array}$$

$$-81_{(10)} = \Sigma_2(81) = 0101110_{(2)} + 1 = 0101111_{(2)}$$

Κρατούμενο αριστερά από το περισσότερο σημαντικό ψηφίο (MSB)

- το διαγράφουμε και το αποτέλεσμα είναι **θετικό**
- **μέτρο** αριθμού : τα υπόλοιπα bit

Αν δεν προκύψει κρατούμενο

- το αποτέλεσμα είναι **αρνητικό**
- **μέτρο** αριθμού : το συμπλήρωμα ως προς 2 των bit του αποτελέσματος



Αφαίρεση με συμπλήρωμα ως προς 2 (2)

54-81

54+(-81)

11111

κρ.

0110110

+ 0101111

1100101

$\Sigma_2(1100101)=0011010+1=0011011$ που είναι ο αριθμός 27 (54-81=-27)

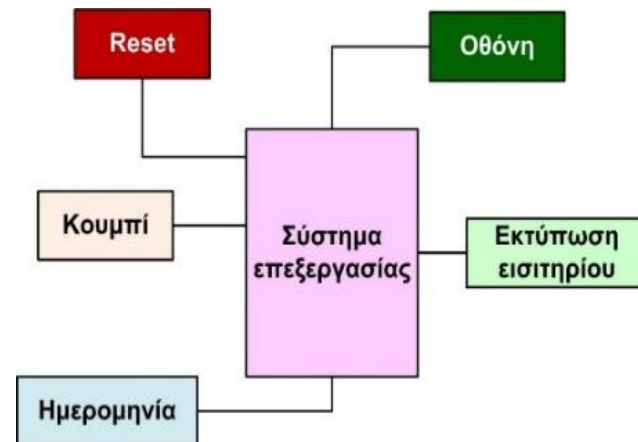


Εφαρμογή

Εισιτήριο αυτοκινήτων (1)



- Σύγχρονο εμπορικό κέντρο με πάρκινγκ αυτοκινήτων 680 θέσεων
- Είσοδος από το ισόγειο (χωρητικότητα 90 θέσεων)



Εφαρμογή

Εισιτήριο αυτοκινήτων (2)

Έλεγχος διαθεσιμότητας

- Ο οδηγός πατά το κουμπί για την έκδοση του εισιτηρίου
- Αυξάνεται ο μετρητής που μετρά το σύνολο των αυτοκινήτων από την αρχή της μέρας
- Συγκρίνεται με το συνολικό πλήθος των θέσεων
- Σύγκριση : αφαίρεση του α/α οχήματος από τον αριθμό που αντιπροσωπεύει τις μέγιστες θέσεις, δηλαδή το 90
- Αν υποθετικά πρόκειται για το 51^ο όχημα, τότε θα πρέπει να γίνει η αφαίρεση 90-51

$$90_{10} = 1011010_2$$

$$51_{10} = 0110011_2$$

90-51 : θα εκτελεστεί ως $90+(-51)$, άρα θα πρέπει να προσθέσουμε στο 90 το συμπλήρωμα ως προς 2 του αριθμού 51.

$$(-51)_2 = 1001101_2$$

τελική πράξη :

$$\begin{array}{r} 1011010 \\ +1001101 \\ \hline 10100111 \end{array}$$

Υπάρχει κρατούμενο

- το αγνοούμε και το αποτέλεσμα είναι θετικό
- υπάρχει διαθέσιμη θέση



Εφαρμογή

Εισιτήριο αυτοκινήτων (3)

Δημιουργία γραμμωτού κώδικα

- Μοναδικός κώδικας για κάθε όχημα
- Συνδυασμός ημερομηνίας και αριθμού θέσης στο πάρκινγκ (1 έως 90)
- π.χ για την ημερομηνία 18/3/2021 και θέση 51, ο αριθμός που προκύπτει είναι 18032151

$$[1-31] = 5\text{bit} (2^5=32)$$

$$[1-12] = 4\text{bit} (2^4=16)$$

$$[21-31] = 5\text{bit} (2^5=32)$$

$$[1-90] = 7\text{bit} (2^7=128)$$

μετατρέποντας τον κωδικό αριθμό 18032151 ανά δύο ψηφία στο δυαδικό σύστημα, προκύπτει η ακολουθία:

18_{10}	03_{10}	21_{10}	51_{10}
10010_2	0011_2	10101_2	0110011_2

Γράφοντας με συνεχόμενο τρόπο όλα τα ψηφία, προκύπτει

100100011101010110011



Εφαρμογή

Εισιτήριο αυτοκινήτων (4)

1ος όροφος

Θέση 51

Ημερομηνία 18/3/2021

Ώρα 18.30



100100011101010110011

Λεπτή κάθετη γραμμή: 0
Φαρδιά κάθετη γραμμή: 1



Αναπαράσταση αριθμών κινητής υποδιαστολής πρότυπο IEEE 754 (1)

Συστατικά

- πρόσημο
- εκθέτης
- κλασματικό μέρος (γνωστό και στη βιβλιογραφία ως Mantissa)

Η βάση του συστήματος θεωρείται πάντα ότι είναι το 2 και έτσι δεν έχει νόημα να αποθηκεύεται ως συστατικό του αριθμού αυτή η πληροφορία

Τύποι αναπαράστασης

- απλής ακρίβειας με 32bit
- διπλής ακρίβειας με 64bit



Αναπαράσταση αριθμών κινητής υποδιαστολής πρότυπο IEEE 754 (2)

Πρότυπο απλής και διπλής ακρίβειας							
	Πρόσημο		Εκθέτης		Κλασματικό μέρος		Πόλωση
	Πλήθος bit	Θέση bit	Πλήθος bit	Θέση bit	Πλήθος bit	Θέση bit	
Απλή ακρίβεια	1	31	8	30-23	23	22-00	127
Διπλή ακρίβεια	1	63	11	62-52	52	51-00	1023

Τύπος

$$X = (-1)^S \times (1 + KM) \times 2^{(E-\Pi)}$$

X: τελικός αριθμός

S: πρόσημο

KM: κλασματικό μέρος

E: εκθέτης

Π: πόλωση

Αναπαράσταση αριθμών κινητής υποδιαστολής πρότυπο IEEE 754 (3)

ποιον αριθμό του δεκαδικού συστήματος αντιπροσωπεύει ο δυαδικός αριθμός

110000001

1	10000001	010000000000000000000000
S	E	KM

$$E = 129 (10000001)$$

KM = περιλαμβάνει τα bit δεξιά από την υποδιαστολή

Εφόσον ο αριθμός 010000000000000000000000 βρίσκεται δεξιά από την υποδιαστολή (δηλαδή 0.**010000000000000000000000**), σημαίνει ότι το 1 έχει βάρος 2^{-2} , δηλαδή $1/4=0.25$

Συνδυάζοντας τα πεδία του αριθμού προκύπτει:

$$X = (-1)^1 \times (1+01_2) \times 2^{(129-127)} = (-1) \times 1.25 \times 2^2 = -5.0$$



Ολοκλήρωση κεφαλαίου
Δείτε τις ασκήσεις από το βιβλίο

